فصل چهارم

کاربردهای مشتق و پیوستگی

در این فصل به کاربردهای پیوستگی و مشتق می‌پردازیم. خواهیم دید که با استفاده از مشتق یک تابع می‌توانیم اطلّاعاتی در مورد خود تابع به‌دست آوریم که نمونهٔ آن روش یافتن اکسترمم یک تابع است. همچنین موضوع های عمیقتری را بررسی می‌نماییم که مباحثی اساسی و بنیادی در درس حساب و دیفرانسیل و انتگرال می‌باشند.

۱ . ۴ اکسترممهای نسبی

ابتدا چند قضیه را مورد بحث قرار می‌دهیم که در اثبات قضایای مهّمی از قسمت‌های بعدی مورد نیاز هستند.

قضیهٔ ۱ : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و مثبت باشد، آنگاه بازهٔ بازی مانند I شامل a وجود دارد به طوری که به ازای هر $x\neq a$ در I ، $f(x)>0$.

اثبات: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$. بنابر فرض $l>0$ و با استفاده از تعریف حد داریم :

$$\forall \varepsilon>0\,\exists \delta>0 \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon .$$

حال $\varepsilon=\frac{1}{2}l$ گرفته و مشاهده می‌کنیم که

$$|f(x)-l|<\frac{1}{2}l \Leftrightarrow -\frac{1}{2}< f(x)-l<\frac{1}{2}l$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}l< f(x)<\frac{3}{2}l.$$

همچنین

$$
\begin{aligned}
0<|x-a|<\delta &\Leftrightarrow -\delta < x-a < \delta\ , \quad x\neq a \\
&\Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta, \quad x\neq a \\
&\Leftrightarrow x\in (a-\delta, a+\delta), \quad x\neq a.
\end{aligned}
$$

بنابراین اگر $x\in(a-\delta,a+\delta),\ x\neq a$ آنگاه $\frac{1}{2}l< f(x)<\frac{3}{2}l$.
چون $l>0$ نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $x\neq a$ در بازهٔ باز $(a-\delta,a+\delta)$ بایستی $f(x)>0$ و بدین ترتیب اثبات تمام است.

قضیهٔ ۲: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و منفی باشد، آنگاه بازهٔ بازی مانند I شامل a وجود دارد به طوری که هر $x\neq a$ در I، $f(x)<0$.

اثبات: مشابه قضیهٔ ۱ می‌توان این قضیه را ثابت نمود.

مثال ۱: (i) تابع f را که به صورت $f(x)=\dfrac{5}{2x-1}$ تعریف است در نظر می‌گیریم. نمودار تابع در شکل زیر نشان داده شده است. به دلیل آن که $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=1$، و $1>0$، بنابر قضیهٔ ۱ بازهٔ بازی شامل 3 وجود دارد به طوری‌که برای هر $x\neq 3$ در این بازهٔ $f(x)>0$. یکی از این بازه‌ها $(2,4)$ است. در حقیقت، هر بازهٔ باز (a,b) که برای آن $\frac{1}{2}\leq a<3$ و $b>3$ نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد.

شکل ۴ . ۱

(ii) فرض کنیم $g(x)=\frac{6-x}{3-2x}$.داریم، $\lim_{x\to 2} g(x)=-4<0$، پس بنابر قضیهٔ ۲، بازهٔ بازی شامل 2 وجود دارد به طوری که برای هر $x\neq 2$ در این بازهٔ $f(x)<0$. یکی از این بازه‌ها $(\frac{3}{2},3)$ است.
هر بازهٔ باز (a,b) که برای آن $\frac{3}{2}\le a<2$ و $2<b\le 6$ نتیجهٔ مطلوب را به دست می‌دهد.

قضیهٔ ۳ : فرض کنیم تابع f بر بازهٔ باز I شامل a ، به استثنای احتمالاً خود a، تعریف شده باشد. همچنین فرض کنیم که عددی مانند M و (برای آن) عددی مانند $\delta>0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر x، که $0<|x-a|<\delta$، شرط $f(x)\le M$ برقرار باشد. در این صورت اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود و مساوی با L باشد، آنگاه $L\le M$.

اثبات: فرض کنیم که $M<L$ و نشان دهیم که این فرض منجر به یک تناقض می‌گردد. اگر $M<L$، آنگاه عددی مانند $\varepsilon>0$ وجود دارد به طوری‌که $M+\varepsilon=L$. به دلیل آن که $\lim_{x\to a} f(x)=L$، عددی مانند $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری‌که

$$\text{اگر } 0<|x-a|<\delta_1 \text{ آنگاه } |f(x)-L|<\varepsilon$$

که معادل است با

$$\text{اگر } 0<|x-a|<\delta_1 \text{ آنگاه } L-\varepsilon< f(x)<L+\varepsilon .$$

اگر بجای L مقدار $M+\varepsilon$ را قرار دهیم، نتیجه می‌گیریم که عددی مانند $\delta_1>0$ وجود دارد به طوری‌که

$$\text{اگر } 0<|x-a|<\delta_1 \text{ آنگاه } (M+\varepsilon)-\varepsilon< f(x)$$

یا، به عبارت معادل،

$$\text{اگر } 0<|x-a|<\delta_1 \text{ آنگاه } M< f(x)$$

اما، بنا بر فرض، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری‌که

$$\text{اگر } 0<|x-a|<\delta \text{ آنگاه } f(x)\le M .$$

اکنون دو عبارت $f(x)\ge M$, $M< f(x)$ متناقض با یکدیگر هستند. بنابراین، فرض ما مبنی بر این که $M<L$ نادرست است. در نتیجه $L\le M$ و قضیهٔ ثابت شده است.

قضیهٔ ۴ : فرض کنیم تابع f بر بازهٔ I شامل a، به استثنای احتمالاً خودِ a، تعریف شده باشد. همچنین فرض کنیم عددی مانند M و (برای آن) عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر x، که $0 < |x-a| < \delta$، شرط $f(x) \geq M$ برقرار باشد. در این صورت اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود و مساوی با L باشد، آنگاه $L \geq M$.

اثبات. مشابه قضیهٔ ۳ می‌توان این قضیه را ثابت نمود.

اینک بحث رسمی ماکزیمم و می‌نیمم را شروع می‌نماییم.

تعریف : گوییم تابع f در c دارای یک **ماکزیمم نسبی** است هرگاه بازهٔ بازی مانند I شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in I$، $f(c) \geq f(x)$. عدد c را **نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع** f می‌نامند.
شکل های زیر هر کدام قسمتی از نمودار تابعی را نشان می دهند که در c دارای یک ماکزیمم نسبی است.

شکل ۴ . ۲

تعریف : گوییم تابع f در c دارای یک **می نیمم نسبی** است هرگاه بازهٔ بازی مانند I شامل نقطهٔ c وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in I$، $f(c) \leq f(x)$. عدد c را **نقط می نیمم نسبی تابع** f می‌نامند.

شکل های زیرهر کدام قسمتی از نمودار تابعی را نشان می‌دهند که در c دارای یک می نیمم نسبی است.

شکل۴ . ۳

اگر تابع f در c دارای یک ماکزیمم نسبی یا یک می‌نیمم نسبی باشد، آنگاه گفته می‌شود که f در c دارای یک اکسترمم نسبی است. عدد c را **نقطهٔ اکسترمم نسبی** f می‌نامند.

به کمک قضیهٔ زیر می‌توانیم مقادیر احتمالی c را که برای آن‌ها اکسترممی نسبی وجود دارد پیدا کنیم.

قضیهٔ ۵ : فرض کنیم $f(x)$ برای هر x در بازهٔ باز (a,b) تعریف شده و $a<c<b$. اگر f دارای اکسترممی نسبی در c باشد، آنگاه یا $f'(c)$ وجود نداشته، یا در صورت وجود $f'(c)=0$.

اثبات: قضیه را برای حالتی ثابت می‌کنیم که f در c دارای یک می‌نیمم نسبی است.

اگر $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه با استفاده از تعریف مشتق داریم

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}. \qquad (1)$$

به دلیل آن که f در c دارای می‌نیممی نسبی است، بنابر تعریف، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که اگر $0<|x-c|<\delta$ آنگاه $f(x)-f(c)\geq 0$.

اگر x از طرف راست به c نزدیک گردد، $x-c>0$، و بنابراین از $0<x-c<\delta$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 .$$

بنابر قضیهٔ ۴، در صورتی که حد وجود داشته باشد،

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 . \qquad (2)$$

به طریق مشابه، اگر x از طرف چپ به c نزدیک گردد، $x-c<0$، و بنابراین از $-\delta < x-c<0$ نتیجه می‌شود که $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$.

لذا، بنابرقضیهٔ ۳، در صورتی که حد وجود داشته باشد،

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 . \qquad (3)$$

چون $f'(c)$ وجود دارد، حدها در نامساوی‌های (2) و (3) مساوی بوده، و هر دو بایستی برابر با $f'(c)$ باشند. بنابراین از (2) داریم

$$f'(c) \geq 0 \qquad (4)$$

و از (3)،

$$f'(c) \leq 0 . \qquad (5)$$

چون هر دوی (4) و (5) درست هستند، نتیجه می‌گیریم که $f'(c)=0$ و قضیهٔ ثابت شده است. اثبات برای حالتی که f در c دارای یک ماکزیمم نسبی است به روشی مشابه انجام می‌شود.

تعبیر هندسی قضیهٔ فوق بدین صورت است که اگر f دارای اکسترممی نسبی در c بوده و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه نمودار $y=f(x)$ بایستی دارای خط مماس افقی در نقطه‌ای باشد که در آن $x=c$ اختیار شده است.

تبصرهٔ مهم : (1)اگر f تابعی مشتق پذیر باشد، آنگاه تنها مقادیر احتمالی x که در آن‌ها f می‌تواند یک اکسترمم نسبی داشته باشد مقادیری هستند که در شرط $f'(x)=0$ صدق می‌کنند. با وجود این $f'(x)$ ممکن است برای مقدار مشخصی از x مساوی با صفر باشد ولی این نقطه یک نقطه اکسترمم تابع نباشد.

(2) اگر تابع f فقط روی بازهٔ بسته $[a,b]$ تعریف شده باشد، آنگاه نقاط a و b نمی‌توانند نقاط اکسترمم نسبی تابع باشند، به دلیل آن که تابع f در همسایگی نقاط a و b تعریف نشده است.

(3) ممکن است تابع f در نقطه‌ای دارای اکسترمم نسبی باشد ولی در این نقطه نه مشتق پذیر باشد و نه پیوسته. به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۲ :

(i) تابع ثابت $f(x)=k$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که حوزهٔ تعریف (قلمرو) این تابع تمام اعداد حقیقی Rاست. اکنون فرض کنیم $\alpha_0 \in R$ عدد حقیقی دلخواهی باشد. در این صورت به ازای هر $x \in R$، $f(x)=l=f(\alpha_0)$. پس می‌توان گفت که $f(x) \geq f(\alpha_0)$ و نیز $f(x) \leq f(\alpha_0)$ و نتیجه می‌گیریم که α_0یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی و نیز یک نقطهٔ می‌نیمم نسبی تابع ثابت f است.

(ii) تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$ رادرنظر می‌گیریم (به مثال ۷ از فصل دوم مراجعه نمایید). می‌دانیم که این تابع در تمامی نقاط صحیح

$$x=n \qquad\qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

ناپیوسته است. نشان می‌دهیم که در این نقاط تابع دارای ماکزیمم نسبی است. زیرا اگر $n_0 \in Z$ عدد صحیح دلخواهی باشد آنگاه به ازای هر $x \in (n_0-1,n_0)$ داریم $f(x)=n_0-1$ وبنابراین $f(x)=n_0-1<n_0=[n_0]=f(n_0)$ یعنی $f(x)<f(n_0)$. همچنین اگر

$x \in [\ n_0,n_0+1)$ آنگاه $f(x)=n_0$ و لذا

$$f(n_0)=n_0=f(x).$$

در نتیجه می‌توان گفت که به ازای هر $x \in (n_0-1,n_0+1)$ ، $f(x) \leq f(n_0)$ یعنی تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$ در نقطهٔ n_0 دارای یک ماکزیمم نسبی است. در مرحله بعد نشان می دهیم که اگر $\alpha_0 \in R$ یک عدد غیر صحیح باشد آنگاه $f(x)=[x]$ در نقطه α_0 هم دارای ماکزیمم نسبی و هم دارای می‌نیمم نسبی است. گوییم چون α_0 عددی غیر صحیح است پس عدد صحیحی مانند n وجود دارد به طوری که $n<\alpha_0<n+1$. حال به ازای هر $x \in (n,n+1)$ داریم $f(x)=[x]=n$ و بنابراین می‌توان گفت که در بازهٔ باز $(n,n+1)$ تابع f دارای مقداری ثابت است. لذا، با استفاده از (i) ، می‌توان نشان داد که تابع f در α_0 هم دارای یک ماکزیمم نسبی و هم دارای یک می‌نیمم نسبی است.

(iii) تابع $f(x)=x-[x]$ در هر نقطهٔ

$$x=n \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

دارای یک می‌نیمم نسبی بوده ولی در این نقاط ماکزیمم نسبی ندارد. نمودارتابع (که آن را به سادگی می‌توان رسم نمود) در شکل زیر دیده می‌شود.

شکل ۴ . ۴

اکنون فرض کنیم $n\in Z$ عدد صحیح دلخواهی باشد. اگر x عددی حقیقی باشد به طوری که $n-1<x<n$، آنگاه $f(x)=x-[x]=x-(n-1)$ و لذا، به دلیل آن که $x>n-1$، داریم $f(x)>0$. امّا $f(n)=n-[n]=0$ پس $f(x)>f(n)$. همچنین اگر x عددی حقیقی باشد به طوری که $n<x<n+1$ ، آنگاه $f(x)=x-[x]=x-n$ و دیده می شود که $f(x)>0$. پس $f(x)>f(n)$. نتیجه می‌شود که به ازای هر $x\in(n-1,n+1)$ داریم $f(x)\geq f(n)$ و لذا تابع $f(x)=x-[x]$ در نقطهٔ n دارای یک می‌نیمم نسبی است. بالاخره از روی نمودار تابع هم دیده می‌شود که اگر x بین دو عدد صحیح n و $n+1$ باشد ($n<x<n+1$)، آنگاه $f(x)=x-n$ و لذا تابع در نقاط غیر صحیح اکسترمم نسبی ندارد.

مثال ۳ : (i) تابع f با ضابطه $f(x)=(x-1)^3$ را درنظر می‌گیریم. نمودار این تابع در زیر نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنیم که $f'(x)=3(x-1)^2$ و $f'(1)=0$. امّا برای $x<1$ داریم $f(x)<0$ ، یعنی، $f(x)<f(1)$ و برای $x>1$ داریم $f(x)>0$ ، یعنی $f(x)>f(1)$. بنابراین f در نقطهٔ $c=1$ دارای یک اکسترمم نسبی نمی‌باشد.

شکل ۴ . ۵

(ii) فرض کنیم تابع f با ضابطهٔ زیر تعریف شده باشد :

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 \ , \ x\le 3\\ 8-x \ \ , \ x>3.\end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل زیر دیده می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که تابع f دارای یک ماکزیمم نسبی در 3 است. مشتق چپ در 3 برابر با $f'_{-}(3)=2$، و مشتق راست در 3 برابر با $f'_{+}(3)=-1$ می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $f'(3)$ وجود ندارد.

شکل ۴ . ۶

مثال ۴ : تابع $f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$ را که در آن n عددی طبیعی است،(تابع $\varphi(x)$ در $x=x_0$ پیوسته می‌باشد و $\varphi(x_0)\neq 0$) درنظر می‌گیریم. وجود اکسترمم در $x=x_0$ برای تابع $f(x)$ را بررسی نمایید.

حل. چون $\varphi(x_0)\neq 0$ پس یا $\varphi(x_0)>0$ یا $\varphi(x_0)<0$.

حالت اول : فرض کنیم $\varphi(x_0)>0$. چون بنابرفرض $\varphi(x)$ در $x=x_0$ پیوسته است پس $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)>0$ و لذا بنا بر قضیهٔ ۱ بازهٔ بازی مانند I شامل x_0 وجود دارد به طوری که به ازای هر $x\in I$ شرط $\varphi(x)>0$ برقرار است.

اکنون اگر n عددی زوج باشد، آنگاه به ازای هر $x \in I$ و $x \neq x_0$ داریم $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x) > 0$ و چون $f(x_0) = 0$ پس $f(x) > f(x_0)$ و این نشان می‌دهد که تابع f در x_0 دارای یک می‌نیمم نسبی است. امّا اگر n عددی فرد باشد، برای هر $x \in I$ که $x > x_0$ داریم $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x) > 0$ و به ازای هر $x \in I$ که $x < x_0$ داریم $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x) < 0$. بنابراین تابع f در x_0 اکسترمم ندارد.

حالت دوم : فرض کنیم $\varphi(x_0) < 0$. با استدلالی مشابه حالت اول می‌توان نشان داد که اگر n زوج باشد، آنگاه تابع f در x_0 دارای یک ماکزیمم نسبی است و اگر n فرد باشد تابع f در x_0 اکسترمم ندارد.

تبصره : از قضیهٔ ۵ و مطالب گفته شده نتیجه می‌گیریم که اگر تابع f در نقطهٔ x_0 دارای یک اکسترمم نسبی باشد آنگاه دقیقاً سه احتمال وجود دارد :

(1) نمودار تابع f در نقطهٔ $P = (x_0, f(x_0))$ خط مماس ندارد.
(2) نمودار تابع f در P دارای خط مماسی عمودی است (هر گاه $f'(x_0) = \infty$).
(3) نمودار تابع f دارای خط مماس افقی در P است (هر گاه $f'(x_0) = 0$).

شکل ۴ . ۷

این سه احتمال به طور نموداری در شکل فوق توصیف شده‌اند که در آن‌ها هر تابع نمایش داده شده دارای یک ماکزیمم نسبی در در x_0 است.

از آنچه تا کنون گفته شد نتیجه می‌گیریم که اگر تابعی مانند f در نقطهٔ c تعریف شده باشد، آنگاه شرط لازم برای آن که f در c دارای یک اکسترمم باشد آنست که یا $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد. امّا همانگونه که در مثال‌های بالا دیدیم این شرط کافی نیست.

تعریف : فرض کنیم c عضوی از حوزهٔ تعریف تابع f باشد. عدد c را یک **نقطهٔ بحرانی** تابع f می‌نامیم در صورتی که $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

با توجه به این تعریف و بحث قبلی نتیجه می‌گیریم که شرط لازم برای آن که تابع f در c دارای یک اکسترمم نسبی باشد آن است که c یک نقطهٔ بحرانی این تابع باشد.

مثال ۵ : نقاط بحرانی توابع زیر را پیدا کنید :

(1) $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$ (2) $f(x)=x^5+4x$

(3) $f(x)=x^3+x, x\in[-1,1]$ (4) $f(x)=x^4-2x^2, x\in[-2,2]$

(5) $f(x)=|4-x^2|$ ، $x\in[-2,0]$ (6) $f(x)=|x^2-2x|$ ، $x\in[-1,4)$

(7) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ (8) $f(x)=arc\sin(x^2-1)$ ، $x\geq 0$

(9) $f(x)=\cos^2 x$ (10) $f(x)=x\sin x+\cos x$

(11) $f(x)=x^2[x]$ و $x\in[-2,1]$ (12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

حل. (1) حوزهٔ تعریف تابع f مجموعه اعداد حقیقی R است. مشتق f را محاسبه می‌کنیم :

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+4\times\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+1)=\frac{4(x+1)}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

دیده می‌شود که به ازای $x=-1$ داریم $f'(x)=0$ و به ازای $x=0$ ، $f'(x)$ وجود ندارد. هر دو عدد $-1,0$ در حوزهٔ تعریف تابع f هستند، بنابراین نقاط بحرانی تابع f عبارتنداز $-1,0$.

(2) حوزهٔ تعریف تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی R است. مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم :

$f'(x)=5x^4+4$ و دیده می‌شود که به ازای هر $x\in R$، $f'(x)=5x^4+4>0$.
بنابراین، به دلیل آن که $f'(x)$ هم به ازای هر $x\in R$ تعریف شده است، تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد.
(3) بنابر فرض تابع f فقط بر بازهٔ بستهٔ $[-1,1]$ تعریف شده است. در اینجا بایستی دقت نمود که تابع f در نقاط انتهایی $-1,1$ مشتق ندارد (زیرا در نقطهٔ 1 از راست و در نقطهٔ -1 از چپ تابع f مشتق ندارد) پس $-1,1$ از نقاط بحرانی تابع f هستند. اکنون به ازای هر $x\in(-1,1)$ مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم :
$f'(x)=3x^2+1$ و دیده می‌شود که همواره $f'(x)=3x^2+1>0$.

بنابراین در بازهٔ $(-1,1)$ تابع $f'(x)$ هرگز صفر نمی‌شود و در نتیجه نقاط بحرانی تابع f منحصرند به $-1,1$.
(4) به دلیل آن که حوزهٔ تعریف تابع f، $Df=[-2,2]$ فرض شده است (و با توجه به توضیحات در (3)) نقاط $-2,2$ از نقاط بحرانی تابع f هستند. مشتق تابع f را محاسبه می‌کنیم :
$f'(x)=4x^3-4x$ و یا $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$.

اکنون

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1) \Leftrightarrow x=0 \text{ یا } x=1 \text{ یا } x=-1$$

و بنابراین پنج نقطهٔ $0,-1,1,-2,2$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند.
(5) چون حوزهٔ تعریف تابع f، $Df=[-2,0]$ فرض شده است پس برای هر $x\in Df$

$$-2\le x\le 0 \Rightarrow 0\le x^2\le 4 \Rightarrow 4-x^2\ge 0 .$$

بنابراین $f(x)=\left|4-x^2\right|=4-x^2$. بدیهی است که $0,-2$ نقاط بحرانی تابع f هستند.
داریم $f'(x)=0, f'(x)=-2x$ معادل است با $x=0$. بنابراین $0,-2$ تنها نقاط بحرانی تابع f هستند.
(6) ابتدا x^2-2x را تعیین علامت می‌کنیم :

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ یا } x=2$$

x	-3		0		2		4
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

$|x^2-2x| \quad \Big| \qquad x^2-2x \qquad 2x-x^2 \qquad x^2-2x$

بنابراین تابع f را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & , -3\le x\le 0 \\ 2x-x^2 & , 0<x<2 \\ x^2-2x & , 2\le x<4. \end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود که $f'_-(0)=+2$, $f'_+(0)=-2$ و لذا تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. دلیل مشابهی نشان می‌دهد که تابع در $x=2$ هم مشتق‌پذیر نمی‌باشد و بنابراین خواهیم داشت

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & , -3<x<0 \\ \text{وجود ندارد} & , x=0 \\ 2-2x & , 0<x<2 \\ \text{وجود ندارد} & , x=2 \\ 2x-2 & , 2<x<4 \end{cases}$$

و از $f'(x)=0$ نتیجه می‌شود که $2-2x=0$، یعنی، $x=1$. حال، به دلیل آن که $x=-3$ نیز یک نقطهٔ بحرانی تابع است، نقاط $2,1,0,-3$، تنها نقاط بحرانی تابع f هستند.

(7) به سادگی دیده می‌شود که حوزهٔ تعریف تابع f برابر با $Df=[0,2]$ می‌باشد. بنابراین $x=2, x=0$ دونقطه بحرانی تابع f هستند. اکنون به ازاء $x\neq 0,2$ مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم :

$$f(x)=\sqrt{2x-x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

و از $f'(x)=0$ نتیجه می‌شود که $1-x=0$، یعنی، $x=1$ پس $2,1,0$ نقاط بحرانی تابع می‌باشند.

(8) از $f(x)=\arcsin(x^2-1)$ به‌دست می‌آوریم که $-1\le x^2-1\le 1$، یعنی، $0\le x^2\le 2$ و چون $x\ge 0$ فرض شده است این معادل است با $0\le x\le\sqrt{2}$ و بنابراین $Df=[0,\sqrt{2}]$. اکنون $x\in(0,\sqrt{2})$ فرض کرده و $f'(x)$ را به دست می‌آوریم :

$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}=\frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}=\frac{2}{\sqrt{2-x^2}}.$$

دیده می‌شود که $f'(x)>0\,(0<x<\sqrt{2})$ و بنابراین $0,\sqrt{2}$ تنها نقاط بحرانی تابع f هستند.

(۹) حوزهٔ تعریف تابع f مجموعه اعداد حقیقی R است، $Df=R$، و داریم

$$f'(x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x$$

پس $f'(x)=0$ معادل با $\sin 2x=0$ می‌باشد. امّا

$$\sin 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi, k\in Z \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in Z.$$

چون $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$، پس $x=0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi,\ldots.$ و تابع به تعداد نامتناهی نقاط بحرانی دارد.

(۱۰) داریم $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x\ ,Df=R$

و $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\cos x=0 \Leftrightarrow x=0$ یا $\cos x=0$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ یا } x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$$

و بنابراین تابع به تعداد نامتناهی نقاط بحرانی دارد.

(۱۱) داریم

$$\begin{array}{lll}-2\le x<-1, & [x]=-2 & ,f(x)=-2x^2\\ -1\le x<0\ , & [x]=-1 & ,f(x)=-x^2\\ 0\le x<1\ , & [x]=0 & ,f(x)=0\end{array}$$

و بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}-2x^2 & ,-2\le x<-1\\ -x^2 & ,-1\le x<0\\ 0 & ,0\le x<1\\ 1 & ,\ x=1.\end{cases}$$

اکنون اگر مشتق تابع را محاسبه کنیم به سادگی دیده می‌شود که

$$f'(x)=\begin{cases}-4x & ,\quad -2<x<-1\\ \text{وجود ندارد} & ,\quad x=-1\\ -2x & ,\quad -1<x<0\\ 0 & ,\quad x=0\\ 0 & ,\quad 0<x<1.\end{cases}$$

نتیجه می‌شود که $x=-1, x=-2$ و کلیهٔ نقاط بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ نقاط بحرانی تابع هستند.

(12) حوزهٔ تعریف تابع f عبارت است از $Df=R-\{0\}$. حال مشتق f را محاسبه می‌کنیم :

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\times x-\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\frac{x^2-(1+x^2)}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$
$$=\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

ملاحظه می‌شود که به ازای هر $x\in Df$ ، $f'(x)<0$ و لذا $f'(x)$ هرگز صفر نمی‌شود. به علاوه حوزهٔ تعریف f' برابر است با $Df'=R-\{0\}$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که تابع f نقطهٔ بحرانی ندارد.

در بسیاری از مسائل تابعی مانند f بر بازهٔای مانند $[a,b]$ تعریف شده است و هدف ما یافتن بزرگترین یا کوچکترین مقدار تابع بر این بازه می‌باشد

تعریف : گوئیم تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ دارای **ماکزیمم مطلق** است هر گاه عددی مانند $c\in[a,b]$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $x\in[a,b]$ ، $f(c)\geq f(x)$. در چنین حالتی، $f(c)$ مقدار ماکزیمم مطلق f بر بازهٔ $[a,b]$ نامیده می‌شود.

تعریف : گوییم تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ دارای **می‌نیمم مطلق** است هرگاه عددی مانند $d\in[a,b]$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $x\in[a,b]$ ، $f(d)\leq f(x)$. در چنین حالتی، $f(d)$ مقدار می‌نیمم مطلق f بر بازهٔ $[a,b]$ نامیده می‌شود.

اگر گفته شود که تابع f بر $[a,b]$ دارای **اکسترمم مطلق** است منظور این است که f بر این بازه دارای ماکزیمم مطلق یا می‌نیمم مطلق می‌باشد.

در رابطه با وجود ماکزیمم و می‌نیمم مطلق یک تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته قضیهٔ مهم زیر را، که به قضیهٔ مقدار نهایی موسوم است، داریم.

قضیهٔ ۶ (قضیهٔ مقدار نهایی) : اگر تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه بر $[a,b]$ دارای ماکزیمم مطلق و می‌نیمم مطلق است. به عبارت دیگر دوعدد مانند x_2, x_1 در بازه بسته $[a,b]$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $x \in [a,b]$، $f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$.

همچنین برای یافتن دستورالعملی جهت تعیین ماکزیمم و می‌نیمم مطلق یک تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته به قضیهٔ زیر نیاز داریم.

قضیهٔ ۷ : فرض کنیم تابع f روی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ تعریف شده و نقطهٔ c با شرط $a<c<b$ نقطهٔ اکسترمم مطلق این تابع باشد. در این صورت c یک نقطهٔ بحرانی تابع f است.

اثبات. چون $c \in (a,b)$ پس می‌توان گفت که تابع f در یک همسایگی نقطهٔ c تعریف شده است. بنابراین c (نه تنها نقطه اکسترمم مطلق تابع است بلکه) یک نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f نیز می‌باشد. اکنون اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آنگاه c یک نقطهٔ بحرانی f است و اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه، بنابر قضیهٔ ۵، $f'(c)=0$. اما این مطلب هم نتیجه می‌دهدکه c یک نقطه بحرانی تابع f است.

توجه داریم که اکسترمم مطلق یک تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته یا یک اکسترمم نسبی است یا مقدار تابع در یکی از نقاط انتهایی بازهٔ است. چون شرط لازم برای آن که یک تابع دارای اکسترممی نسبی در نقطه‌ای مانند c باشد آن است که c یک نقطهٔ بحرانی تابع باشد، می‌توانیم با دستورالعمل زیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق یک تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته را پیدا کنیم.

دستورالعمل یافتن اکسترمم‌های مطلق یک تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته

فرض کنیم تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد. برای یافتن ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع f بر $[a,b]$ به طریق زیر عمل می‌نماییم :

(1) نقاط بحرانی تابع f بر بازهٔ (a,b) را پیدا می‌کنیم ؛

(2) مقدار f را در هر یک از نقاط بحرانی در (a,b) پیدا می‌کنیم ؛

(3) مقدار f در نقاط انتهایی بازهٔ $[a,b]$، یعنی $f(b), f(a)$ را پیدا می‌کنیم ؛

(4)بزرگترین مقادیر در (2) و (3) ماکزیمم مطلق تابع f و کوچکترین مقادیر در (2) و (3) می‌نیمم مطلق تابع f بر $[a,b]$ می‌باشد.

مثال ۶ : اکسترمم‌های مطلق توابع زیر را در بازه‌های بستهٔ داده شده بدست آورید :

(1) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ ، $x \in [-2, \frac{1}{2}]$ (2) $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$ ، $x \in [1,5]$

(3) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \ , \ x < 1 \\ 5x - 8 \ , \ x \geq 1 \end{cases}$ ، $x \in [-2, \frac{8}{5}]$ (4) $f(x) = x^2 \ln x$ ، $x \in [1, e]$

(5) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ ، $x \in [-2, \frac{5}{2}]$ (6) $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ ، $x \in [0,4]$

(7) $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$ ، $0 \leq x \leq 1$ (8) $f(x) = x - \sin 2x$ ، $x \in [0, \pi]$

(9) $f(x) = \arccos(x-1)$ ، $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ (10) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ ، $x \in [-1, 2]$

(11) $f(x) = 2\sin x - \cos 2x$ ، $x \in [0, 2\pi]$.

حل. (1) چون تابع f بر $[-2, \frac{1}{2}]$ پیوسته است می‌توانیم قضیهٔ مقدار نهایی را بکار بریم. نقاط بحرانی f بر $(-2, \frac{1}{2})$ را به دست می‌آوریم : داریم $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$. دیده می‌شود که برای هر عدد حقیقی x، $f'(x)$ وجود دارد و لذا تنها نقاط بحرانی تابع f مقادیری از x هستند که برای آن‌ها $f'(x) = 0$. امّا

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{یا} \quad x = -1$$

شکل ۴ . ۸

نقاط بحرانی f عبارتنداز ۱-، $\frac{1}{3}$ و این نقاط در بازهٔ بستهٔ $[-2,\frac{1}{2}]$ قرار دارند. مقادیر تابع f را در این نقاط و نیز نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌نماییم :

$$f(-2)=-1 \;\;,\;\; f(-1)=2 \;\;,\;\; f(\frac{1}{3})=\frac{22}{27}\;,\;\; f(\frac{1}{2})=\frac{7}{8}$$

در $x=-1$ مقدار ماکزیمم مطلق تابع برابر با $f(-1)=2$ و در $x=-2$ مقدار می‌نیمم مطلق تابع برابر با $f(-2)=-1$ است.

(2) چون f بر $[1,5]$ پیوسته است می‌توانیم قضیهٔ مقدار نهایی را بکار بریم. داریم

$f'(x)=\dfrac{2}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}$ و دیده می‌شود که xی وجود ندارد که برای آن $f'(x)=0$. بهر حال، به دلیل آن که $f'(x)$ در $x=2$ وجود ندارد، نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ 2 یک نقطهٔ بحرانی تابع است. لذا اکسترمم‌های مطلق تابع در 2 یا در یکی از نقاط انتهایی بازه یافت می‌شود.

پس از محاسبه دیده می‌شود که :

$$f(1)=1\;,\;\; f(2)=0\;,\;\; f(5)=\sqrt[3]{9}\;,$$

بنابراین تابع f در $x=2$ دارای می‌نیمم مطلق $f(2)=0$ و در $x=5$ دارای ماکزیمم مطلق $f(5)=\sqrt[3]{9}$ می‌باشد.

شکل ۴ . ۹

(3) اگر $x<1$, $f(x)=x^2-4$ و لذا $f'(x)=2x$. پس $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

اگر $x>1$ ، $f(x)=5x-8$ و لذا $f'(x)=5>0$. می‌توان نشان داد که $f'_-(1)=2$ و $f'_+(1)=5$. بنابراین تابع در $x=1$ مشتق ندارد و لذا ۰ و ۱ و ۲- و $\frac{8}{5}$ نقاط بحرانی و انتهایی در بازه برای تابع هستند.

اکنون $f(0)=-4$ ، $f(-2)=0$ ، $f(\frac{8}{5})=0$ ، $f(1)=-3$ ، پس تابع در $x=0$ دارای می‌نیمم مطلق $f(0)=-4$ و در نقاط $x=-2$ و $x=\frac{8}{5}$ دارای ماکزیمم مطلق $f(-2)=f(\frac{8}{5})=0$ می‌باشد.

شکل ۴ . ۱۰

(4) می‌دانیم که $\ln x=\log_e x$. اکنون $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$$

و

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x(2\ln x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ یا } 2\ln x+1=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ یا } \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=0 \text{ یا } x=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

حال، به دلیل آن که $2<e<3$، $\frac{1}{\sqrt{e}}<1$ و لذا هیچکدام از اعداد $0,\frac{1}{\sqrt{e}}$ به بازهٔ بستهٔ $[1,e]$ تعلق ندارند. به عبارت دیگر تابع $f(x)$ در بازهٔ باز $(1,e)$ دارای نقطهٔ بحرانی نمی‌باشد. چون $f(1)=1^2\ln 1=0$ و $f(e)=e^2\ln e=e^2$ پس تابع f دارای می‌نیمم مطلق $f(1)=0$ و ماکزیمم مطلق $f(e)=e^2$ بر بازهٔ $[1,e]$ می‌باشد.

(5) مشتق تابع f را به دست می‌آوریم : $f'(x)=6x^2-6x-12$

و

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x-12=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ یا } x=2.$$

دیده می‌شود که $-1,2\in(-2,\frac{5}{2})$ و بنابراین ۲-، ۱-، ۲ و $\frac{5}{2}$ نقاط بحرانی و انتهایی تابع f هستند. داریم

$$f(-2)=-3\ ,\ \ f(-1)=8\ ,\ \ f(2)=-19\ ,\ \ f(\frac{5}{2})=-\frac{32}{2}$$

بنابراین $f(-1)=8$ ماکزیمم مطلق و $f(2)=-19$ و می‌نیمم مطلق تابع بر $[-2,\frac{5}{2}]$ می‌باشد.

(6)به ازای $x\in(0,4)$ داریم : $f'(x)=1+2\frac{1}{2\sqrt{x}}=1+\frac{1}{\sqrt{x}}>0$ ، یعنی در $(0,4)$ هرگز $f'(x)$ برابر با صفر نمی‌شود. حال $f(0)=0$ ، $f(4)=8$ و بنابراین $f(0)=0$ می‌نیمم مطلق و $f(4)=8$ ماکزیمم مطلق تابع f بر $[0,4]$ می‌باشد.

(7) داریم $f(x)=\frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)+1}{x^2+x+1}=1+\frac{1}{x^2+x+1}$.

و لذا $f'(x)=\frac{-2x-1}{(x^2+x+1)^2}$. دیده می‌شود که $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1}{2}$

امّا $-\frac{1}{2}\notin(0,1)$. چون $f(0)=2$ و $f(1)=\frac{4}{3}$ ، پس تابع f در $x=0$ دارای ماکزیمم مطلق $f(0)=2$ و در $x=1$ دارای می‌نیمم مطلق $f(1)=\frac{4}{3}$ می‌باشد.

(8) داریم $f'(x)=1-2\cos 2x$ و از $f'(x)=0$ نتیجه می‌شود که $1-2\cos 2x=0$، یعنی، $\cos 2x=\frac{1}{2}$ و لذا $2x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}$، یعنی $x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$. پس نقاط 0 و $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و π تنها نقاط بحرانی و انتهایی تابع در $[0,\pi]$ هستند.

$$f(0)=0\ ,\ f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ f(\frac{5\pi}{6})=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ f(\pi)=\pi$$

و بنابراین تابع در $x=\frac{\pi}{6}$ دارای می‌نیمم مطلق $f(\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ و در $x=\frac{5\pi}{6}$ دارای ماکزیمم مطلق $f(\frac{5\pi}{6})=\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ می‌باشد.

(9) مشتق تابع f را به ازای $x\in(\frac{1}{2},1)$ محاسبه می‌کنیم :

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}<0\,.$$

پس در بازهٔ باز $(\frac{1}{2},1)$ مشتق صفر نمی شود . داریم $f(\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3},\ f(1)=\frac{\pi}{2}$. بنابراین تابع در $x=\frac{1}{2}$ دارای ماکزیمم مطلق $f(\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3},$ و در $x=1$ دارای می‌نیمم $f(1)=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

(10) مشتق تابع f را محاسبه می‌نماییم : $f'(x)=12x^3-12x^2$ و

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^3-12x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x=1.$$

لذا نقاط بحرانی و انتهایی تابع f بر $[-1,2]$ عبارتنداز $2,-1,0,-1$.

اکنون پس از محاسبه دیده می‌شود که

$$f(-1)=7,\ f(0)=0,\ f(1)=-1,\ f(2)=16$$

پس تابع در $x=1$ دارای می‌نیمم مطلق $f(1)=-1$ و در $x=2$ دارای ماکزیمم مطلق $f(2)=16$ می‌باشد.

(۱۱) این تابع برای تمام اعداد حقیقی R مشتق‌پذیر است و لذا در $(0,2\pi)$ نقاط بحرانی با قرار دادن $f'(x)=0$ بدست می‌آید :

$$f'(x)=2\cos x+2\sin 2x$$

و

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x+4\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(1+2\sin x)=0.$$

در بازهٔ $[0,2\pi]$ عامل $\cos x$ به ازای $x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{3\pi}{2}$ برابر با صفر است. عامل $(1+\sin x)$ به ازای $x=\frac{7\pi}{6}$ و $x=\frac{3\pi}{2}$ برابر با صفرمی شود. پس نقاط بحرانی و انتهایی در $[0,2\pi]$ عبارتنداز 0، $\frac{\pi}{2}$، $\frac{7\pi}{6}$، $\frac{3\pi}{2}$، $\frac{11\pi}{6}$، 2π و پس از محاسبه دیده می‌شود که

$$f(0)=-1,\ f(\frac{\pi}{2})=3,\ f(\frac{7\pi}{6})=\frac{-3}{2},\ f(\frac{3\pi}{2})=-1,\ f(\frac{11\pi}{6})=-\frac{3}{2},\ f(2\pi)=-1.$$

بنابراین در $x=\frac{\pi}{2}$ تابع دارای ماکزیمم مطلق $f(\frac{\pi}{2})=3$ و در $x=\frac{11\pi}{6}$ تابع دارای می‌نیمم مطلق $f(\frac{11\pi}{6})=\frac{-3}{2}$ می‌باشد.

تبصره : در فصل دوم به طور کلی ماکزیمم و می‌نیمم مطلق یک تابع مانند f بر یک مجموعهٔ دلخواه مانند A تعریف گردیده و در ادامه مثال‌هایی در مورد وجود یا عدم وجود اکسترمم مطلق یک تابع بر یک مجموعه آورده شده است، که توجه به آن‌ها برای تکمیل مطالب این قسمت از درس ضروری می‌باشد.

۴ . ۲ قضیه‌های رول و میانگین

قضیهٔ مقدار نهایی (قضیهٔ ۶) بیان می‌کند که یک تابع پیوسته بر بازهٔ بسته‌ای مانند $[a,b]$ بایستی دارای ماکزیمم و می‌نیمم بر این بازه باشد. با وجود این، هر دوی این مقادیر (ماکزیمم و می‌نیمم) می‌توانند در نقاط انتهایی بازهٔ $[a,b]$ واقع شوند. قضیهٔ رول شرایطی را به دست می‌دهد که وجود یک مقدار اکسترمم را در یک نقطه داخلی بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ (یعنی در نقطه‌ای متعلق به بازهٔ باز (a,b)) تضمین می‌نماید.

قضیهٔ ۸ (قضیهٔ رول) : فرض کنیم تابع f در شرایط زیر صدق کند :

(i) f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است ؛

(ii) f بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر است ؛

(iii) $f(a)=f(b)=0$.

در این صورت نقطه‌ای مانند c در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد به طوری‌که $f'(c)=0$.

تعبیر هندسی قضیهٔ رول :

شکل زیر نمودار تابعی مانند f را نشان می‌دهد که در شرایط قضیهٔ رول بر $[a,b]$ صدق می‌کند. به صورت شهودی می‌بینیم که لااقل یک نقطه روی منحنی بین نقاط $(a,0)$ و $(b,0)$ وجود دارد که در آن خط مماس بر منحنی موازی با محور X هاست، یعنی، شیب خط مماس برابر با صفر است. در شکل این وضعیت در نقطهٔ P نشان داده شده است.

شکل ۴ . ۱۱

بنابراین طول نقطهٔ P همان مقدار c است که برای آن $f'(c)=0$.

اثبات. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول : به ازای هر x در $[a,b]$ ، $f(x)=0$. در این صورت به ازای هر x در (a,b) بایستی $f'(x)=0$ ، بنابراین نقطهٔ c را می‌توان هر نقطه بین b,a در نظر گرفت.

حالت دوّم : نقطه‌ای مانند x_0 در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد به طوری‌که $f(x_0)\neq 0$.
چون $f(x_0)\neq 0$ ، پس $f(x_0)>0$ یا $f(x_0)<0$.

اولاً، فرض کنیم $f(x_0)>0$ و به دلیل آن که f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است (شرط (i))، بنابر قضیهٔ مقدار نهایی تابع f دارای ماکزیمم مطلق بر $[a,b]$ است. چون $f(x_0)>0$ پس ماکزیمم مطلق f بر $[a,b]$ مثبت است. اگر c_1 نقطه ماکزیمم مطلق f بر $[a,b]$ باشدآنگاه $f(c_1)>0$ ، و به دلیل آن که $f(a)=f(b)=0$ (شرط (iii))، لذا $c_1\neq a,b$ و بنابر این می توان گفت که تابع f در نقطه c_1 دارای یک ماکزیمم نسبی است. اکنون از شرط (ii) و قضیهٔ ۵ نتیجه می‌شود که $f'(c_1)=0$.

ثانیاً، فرض کنیم $f(x_0)<0$ و به دلیل آن که f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است (شرط (ii))، بنابر قضیهٔ مقدار نهایی تابع f دارای می‌نیمم مطلق بر $[a,b]$ است. چون $f(x_0)<0$ پس می‌نیمم مطلق f بر $[a,b]$ منفی است. اگر c_2 نقطهٔ می‌نیمم مطلق f بر $[a,b]$ باشد، آنگاه $f(c_2)<0$ و به دلیل آن که $f(a)=f(b)=0$ (شرط (iii)) لذا $c_2\neq a,b$، یعنی، $c_2\in(a,b)$ و بنابراین می‌توان گفت که تابع f در نقطهٔ c_2 دارای یک می‌نیمم نسبی است. اکنون از شرط (ii) و قضیهٔ ۵ نتیجه می‌شود که $f'(c_2)=0$. بدین ترتیب قضیهٔ ثابت شده است.

شکل ۴ . ۱۲

مثال ۷ : برای توابع زیر شرایط قضیهٔ رول را در بازه‌های داده شده بررسی کرده نقطه‌ای (یا نقاطی) را که، در صورت وجود، برای آن مشتق تابع برابر با صفر است بدست آورید :

(i) $f(x)=4x^3-9x$ و $[a,b]=[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$.

(ii) $f(x)=x^2-3x+2$ و بازهٔ $[a,b]$ را هم پیدا کنید.

(iii) $f(x)=\begin{cases} x & , \ 0\le x<1 \\ 2-x \ , & 1\le x\le 2\end{cases}$ و $[a,b]=[0,2]$.

(iv) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ و $[a,b]=[-1,1]$.

(v) $f(x)=\sqrt{x(4-x)}$ و $[a,b]=[0,4]$.

حل. (i) چون تابع f یک چند جمله ای است پس به ازای هر $x\in R$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. توجه می‌کنیم که $f(-\frac{3}{2})=f(\frac{3}{2})=0$ و بنابراین هر سه شرط قضیهٔ رول بر بازهٔ $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ برقرار است. داریم $f'(x)=12x^2-9$ و

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x^2-9=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ یا } x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین اگر $c=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ اختیار شود ملاحظه می‌کنیم که $c\in(-\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ و $f'(c)=0$.

(ii) معادلهٔ $f(x)=0$ را حل می‌کنیم :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ یا } x=2.$$

پس می‌توان $[a,b]=[1,2]$ اختیار نمود. بسادگی دیده می‌شود که هر سه شرط قضیهٔ رول برای تابع $f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[1,2]$ برقرار است. داریم $f'(x)=2x-3$ و

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

دیده می‌شود که

$$f'(c)=0 \qquad , \ c=\frac{3}{2}\in(1,2).$$

(iii) بسادگی دیده می‌شود که تابع f بر $[0,2]$ پیوسته است و $f(0)=f(2)=0$. امّا هیچ نقطه‌ای مانند $c\in(0,2)$ وجود ندارد به طوری‌که $f'(c)=0$. این مطلب با قضیهٔ رول در تناقض نیست زیرا $f'(1)$ وجود ندارد و لذا شرط دوّم از قضیهٔ رول برقرار نمی‌باشد.

شکل ۴ . ۱۳

(iv) تابع f بر $[-1,1]$ پیوسته بوده و به علاوه $f(-1) = f(1) = 0$. مشتق تابع f را محاسبهٔ می‌کنیم : $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. می‌بینیم که در $x = 0$ مشتق تابع f وجود ندارد و لذا شرط دوّم قضیهٔ رول برقرار نیست. ملاحظه می‌کنیم که نقطه‌ای مانند $c \in (-1,1)$ وجود ندارد به طوری‌که $f'(c) = 0$.

شکل ۴ . ۱۴

(v) تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ تنها در بازهٔ بستهٔ $[0,4]$ تعریف شده است. بسادگی دیده می‌شود که f در $[0,4]$ پیوسته است. مشتق تابع f عبارت است از $f'(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}}$ و لذا در $(0,4)$ تابع f مشتق‌پذیر است. اکنون دیده می‌شود که $f(0) = f(4) = 0$ و لذا هر سه شرط قضیهٔ رول برقرار است. پس بایستی نقطه‌ای مانند $c \in (0,4)$ وجود داشته باشد به طوری که $f'(c) = 0$. امّا دیده می‌شود که $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}} = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ پس $f'(2) = 0, c = 2 \in (0,4)$.

شکل ۴ . ۱۵

در قضیهٔ رول احتیاجی نیست که حتماً $f(a)=f(b)=0$ بلکه کافی اســت $f(a)$ و $f(b)$ با هم مساوی باشند (صفر یا غیرصفر). به قضیهٔ زیر توجه نمایید ؛

قضیهٔ ۹ : فرض کنیم تابع f در شرایط زیر صدق کند :

(i) f بر بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته است ؛

(ii) f بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر است ؛

(iii) $f(a)=f(b)=k$.

در این صورت نقطه‌ای مانند c در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد به طوری‌که $f'(c)=0$.

اثبات. تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$g(x)=f(x)-k.$$

شکل ۴ . ۱۶

دیده می‌شود که اولاً تابع g بر $[a,b]$ پیوسته است؛ ثانیاً تابع g بر (a,b) مشتق‌پذیر است ؛ و ثالثاً $g(a)=g(b)=0$. بنابراین هر سه شرط قضیهٔ رول برای تابع g برقرار می‌باشد، پس بایستی نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ وجود داشته باشد به طوری که $g'(c)=0$.
امّا به ازای هر x در بازهٔ باز (a,b) ، $g'(x)=f'(x)$ و در نتیجه $f'(c)=0$. بدین ترتیب اثبات تمام است.

مثال ۸ : نشان دهید که معادلهٔ $3x^5+15x-8=0$ دقیقاً دارای یک ریشهٔ حقیقی است.

حل. فرض کنیم $f(x)=3x^5+15x-8=0$ ، دیده می‌شود که $f(0)=-8<0$ و $f(1)=10>0$ و لذا ، نقطه‌ای مانند $c\in(0,1)$ وجود دارد به طوری که $f(c)=0$. پس معادله $f(x)=0$ لا اقل دارای یک ریشه حقیقی است. اکنون می خواهیم نشان دهیم که معادلهٔ $f(x)=0$ بیش از یک ریشهٔ حقیقی ندارد. اثبات این مطلب به برهان خلف است. فرض کنیم β,α دو عدد حقیقی باشند به طوری‌که $f(\alpha)=f(\beta)=0$ (فرض خلف) و بدون آن که به کلیت استدلال خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که $\alpha<\beta$. چون تابع f یک چند جمله‌ای است پس بر بازهٔ بستهٔ $[\alpha,\beta]$ پیوسته است و بر بازهٔ باز (α,β) مشتق‌پذیر است. بنابراین دیده می‌شود که هر سه شرط قضیهٔ رول برای f بر $[\alpha,\beta]$ برقرار است و در نتیجه نقطه‌ای مانند $c_1\in(\alpha,\beta)$ وجود دارد به طوری‌که $f'(c_1)=0$. امّا به ازای هر $x\in R$، $f'(x)=15x^4+15>0$ و لذا این با $f'(c_1)=0$ در تناقض است. چون فرض خلف منجر به تناقض گردید باطل است و لذا معادله $f(x)=0$ بیش از یک ریشهٔ حقیقی ندارد.

مثال ۹ : (i)نشان دهید که معادلهٔ

$$\begin{aligned}f(x)=&(x-2)(x-3)(x-4)+(x-1)(x-3)(x-4)\\&+(x-1)(x-2)(x-4)+(x-1)(x-2)(x-3)=0\end{aligned}$$

دارای سه ریشهٔ حقیقی است و حدود ریشه‌ها را تعیین کنید.

(ii) فرض کنیم f یک چند جمله‌ای باشد که در شرایط زیر صدق می‌کند :

$$f(-3)=f(-2)=f(2)=0,\ f'(-3)=f'(-2)=f'(2)=0.$$

نشان دهید که معادلهٔ $f''(x)=0$ حداقل دارای چهار ریشهٔ حقیقی در بازهٔ باز $(-3,2)$ است.

حل. (i)می‌خواهیم از قضیهٔ رول استفاده کنیم. توجه کنید که اگر این قضیه را در مورد تابع f بکار بریم، آنگاه از وجود احتمالی ریشه‌های $f'(x)=0$ مطلع می‌شویم. امّا هدف ما یافتن ریشه‌های $f(x)=0$ است و لذا بایستی با تابعی کار کنیم که مشتق آن تابع f باشد. تابع انتخابی ما تابع g با ضابطهٔ زیر است :

$$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

و به سادگی دیده می‌شود که $g'(x)=f(x)$. امّا $g(x)$ یک چند جمله‌ای است و لذا بر R پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم $g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$.

بنابراین شرایط قضیهٔ رول بر بازه‌های $[1,2],[2,3],[3,4]$ برقرار است. حال بر بازهٔ $[1,2]$ شرایط قضیهٔ رول برقرار است و لذا نقطه ای مانند $x_1\in(1,2)$ وجود دارد به طوری‌که $g'(x_1)=0$، یعنی، $f(x_1)=0$.

بر بازهٔ $[2,3]$ شرایط قضیهٔ رول برقرار است و لذا نقطه‌ای مانند $x_2\in(2,3)$ وجود دارد به طوری‌که $g'(x_2)=0$، یعنی، $f(x_2)=0$.

بالاخره، بر بازهٔ $[3,4]$ شرایط قضیهٔ رول برقرار است و لذا نقطه‌ای مانند $x_3\in(3,4)$ وجود دارد به طوری‌که $g'(x_3)=0$، یعنی، $f(x_3)=0$. در شکل زیر محل تقریبی ریشه‌ها مشخص گردیده است.

شکل ۴ . ۱۷

بدون استفاده از قضیهٔ رول هم می‌توان مسأله را حل کرد. برای این منظور از قضیهٔ۱۳ (الف) از فصل دوم استفاده می‌کنیم. داریم $f(1)=-6<0$ و $f(2)=2>0$ و لذا نقطه‌ای مانند $x_1\in(1,2)$ وجود دارد به طوری‌که $f(x_1)=0$. همچنین $f(3)=-2<0$. پس $f(2)\,f(3)<0$ و لذا نقطه‌ایـن مانند $x_2\in(2,3)$ وجود دارد به طوری‌که $f(x_2)=0$.

بالاخره $f(4)=6>0$ پس $f(3)\,f(4)<0$ و لذا نقطه‌ای مانند $x_3\in(3,4)$ وجود دارد به طوری‌که $f(x_3)=0$.

(ii) چون f یک چند جمله‌ای است پس f و مشتق آن f' (که آنهم یک چند جمله‌ای است) بر سرتاسر R پیوسته و مشتق‌پذیر هستند. بر طبق فرض $f(-3)=f(-2)=0$ ، لذا شرایط قضیهٔ رول

برای تابع f در بازهٔ بستهٔ $[-3,-2]$ برقرار است، پس نقطه‌ای مانند $c_1 \in (-3,-2)$ وجود دارد به طوری‌که $f'(c_1)=0$.

همچنین $f(-2)=f(2)=0$ و لذا نقطه‌ای مانند $c_2 \in (-2,2)$ وجود دارد به طوری‌که $f'(c_2)=0$.

اکنون داریم :

$$-3 < c_1 < -2 < c_2 < 2$$

و

$$f'(-3)=f'(c_1)=f'(-2)=f'(c_2)=f'(2)=0.$$

شرایط قضیهٔ رول برای تابع f' در بازهٔ بسته $[-3,c_1]$ برقرار است و بنابراین نقطه‌ای مانند $x_1 \in (-3,c_1)$ وجود دارد به طوری‌که $f''(x_1)=0$.

به طریق مشابه نقطه‌ای مانند $x_2 \in (c_1,2)$ وجود دارد به طوری‌که $f''(x_2)=0$. همچنین نقطه‌ای مانند $x_3 \in (2,c_2)$ وجود دارد به طوری‌که $f''(x_3)=0$. بالاخره نقطه‌ای مانند $x_4 \in (c_1,2)$ وجود دارد به طوری‌که $f''(x_4)=0$. بدین ترتیب وجود لااقل چهار ریشه برای معادله $f''(x)=0$ تضمین شده است.

مثال ۱۰ : (i) فرض کنیم $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x$. نشان دهید که اگر $\alpha>0$ یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ باشد، آنگاه عددی مانند β با شرط $0<\beta<\alpha$ وجود دارد به طوری‌که $f'(\beta)=0$.

(ii) با استفاده از قضیهٔ رول نشان دهید که مشتق تابع $f(x)=x^4-8x^2+12x$ حداکثر دارای یک ریشه در بازهٔ بستهٔ $[-1,1]$ می‌باشد.

(iii) با استفاده از قضیه رول ثابت کنید که اگر تابع f با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{\pi}{x})\ , & x>0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

تعریف شده باشد، آنگاه $f'(x)$ در بازهٔ باز $(0,1)$ بینهایت بار صفر می‌گردد.

(iv) نشان دهید که معادلهٔ $xe^x=2$ فقط دارای یک ریشهٔ مثبت در بازهٔ $(0,1)$ است.

حل. (i) دیده می‌شود که $f(0)=0$ و چون بنا بر فرض $f(\alpha)=0$ پس شرایط قضیهٔ میانگین برای $f(x)$ بر فاصلهٔ بستهٔ $[0,\alpha]$ برقرار است. بنابراین نقطه‌ای مانند $\beta \in (0,\alpha)$ وجود دارد به طوری‌که $f'(\beta)=0$.

(ii) اگر قرار دهیم $f'(x) = g(x)$ ، آنگاه $g(x) = 4x^3 - 16x + 12$. حال فرض کنیم معادلهٔ $g(x) = 0$ دارای دو ریشهٔ α_1, α_2 در $[-1,1]$ باشد، یعنی، $g(\alpha_1) = g(\alpha_2) = 0, \alpha_1, \alpha_2 \in [-1,1]$ و مثلاً $\alpha_1 < \alpha_2$. اکنون برای تابع $g(x)$ شرایط قضیهٔ رول بر بازهٔ بستهٔ $[\alpha_1, \alpha_2]$ برقرار است. پس نقطه‌ای مانند $c \in (\alpha_1, \alpha_2)$ وجود دارد به طوری‌که $g'(c) = 0$. امّا $g'(x) = 12x^2 - 16$ و

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

دیده می‌شود که $\pm\frac{2}{\sqrt{3}} \notin [-1,1]$ و این متناقض است با $g'(c) = 0$ و $c \in (\alpha_1, \alpha_2) \subseteq (-1,1)$.

لذا فرض این که $f'(x) = 0$ دارای دو ریشه در $[-1,1]$ است درست نمی‌باشد و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = 0$ ، در صورت وجود، حداکثر یکی است.

(iii) تابع f در نقاطی صفر می‌شود که برای آن‌ها $\sin(\frac{\pi}{x}) = 0$. امّا

$$\sin(\frac{\pi}{x}) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{x} = k\pi \ , \ \ k = 1,2,3,...$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \ , k = 1,2,3,....$$
(توجه کنید که $x > 0$)

تابع f بر $[0,1]$ پیوسته و بر $(0,1)$ مشتق‌پذیر است و اگر به k اعداد 3,2,1,... را نسبت دهیم بازه‌های بستهٔ $[\frac{1}{2},1]$ و $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ و ... و $[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]$ و ... را می‌توانیم بسازیم. دیده می‌شود که به طور کلّی $f(\frac{1}{k}) = f(\frac{1}{k+1}) = 0$ و شرایط قضیهٔ رول برای تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]$ برقرار است. بنابراین نقطه ای مانند $c_k \in (\frac{1}{k+1},\frac{1}{k})$ وجود دارد به طوری‌که $f'(c_k) = 0$. چون این مطلب برای $k = 1,2,3,...$ برقرار است حکم ثابت می گردد.

(iv) فرض کنیم $f(x) = xe^x - 2$. چون $f(0) = -2 < 0, \ f(1) = e - 2 > 0$ ، پس $f(0)\ f(1) < 0$ و بنابراین نقطه‌ای مانند $c \in (0,1)$ وجود دارد به طوری که $f(c) = 0$. اکنون اگر معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای ریشهٔ دیگری در بازهٔ $(0,1)$ باشد، مثلاً $d \in (0,1)$ با فرض $c < d$ آنگاه شرایط قضیهٔ رول برای تابع $f(x) = xe^x - 2$ بر بازهٔ بستهٔ $[c,d]$ برقرار است و لذا نقطه‌ای مانند $x_0 \in (c,d)$ وجود دارد به طوری‌که $f'(x_0) = 0$.

امّا داریم
$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

ودیده می‌شود که به ازای هر $x \in (0,1)$، $f'(x) > 0$. امّا این با $f'(x_0) = 0$ متناقض است و بنابراین در $(0,1)$ معادلهٔ $f(x) = 0$ فقط دارای یک ریشه است.

تبصره : (1)از قضیهٔ رول نتیجه می‌شود که بین هر دو ریشهٔ تابع مشتق‌پذیر f، مشتق f، یعنی f' ، حداقل یک ریشه دارد.

(2) همچنین با استفاده از قضیهٔ رول می‌توان نشان داد که اگر $p(x)$ یک چند جمله‌ای باشد، آنگاه بین هر دو ریشه متوالی معادلهٔ $p'(x) = 0$ حداکثر یک ریشهٔ معادلهٔ $p(x) = 0$ قرار دارد.

قضیهٔ رول را برای اثبات یکی از مهمترین قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال، که به **قضیهٔ مقدار میانگین** معروف است، بکار می‌بریم. قضیهٔ مقدار میانگین در اثبات بسیاری از قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد استفاده قرار می‌گیرد و بنابراین ضروری است که با آن آشنایی کامل داشته باشیم.

خواهیم دید که قضیهٔ مقدار میانگین تعمیمی از قضیهٔ رول، و به عبارت دیگر قضیهٔ رول حالت خاصی از قضیهٔ مقدار میانگین، می‌باشد.

قضیهٔ ۱۰ (قضیهٔ مقدار میانگین) : فرض کنیم تابع f در شرایط زیر صدق کند :

(i) f بر بازه بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است ؛

(ii) f بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر است.

در این صورت نقطه‌ای مانند c در بازه باز (a,b) وجود دارد به طوری‌که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین :

شکل زیر نمودار تابعی مانند f را نشان می‌دهد که در شرایط قضیهٔ میانگین صدق می‌کند.

کمیت $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ شیب قطعه خطی است که نقاط $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ را بهم وصل می‌کند.

قضیهٔ مقدار میانگین بیان می‌کند که نقطه‌ای روی منحنی بین B, A وجود دارد که در آن خط مماس بر منحنی موازی وتر $\overline{AB}$است، یعنی، نقطه‌ای مانند c در (a,b) وجود دارد به طوری‌که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

شکل ۴ . ۱۸

اثبات. معادلهٔ خطی که از نقاط B, A می‌گذرد به صورت

$$y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

یا

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

است. اکنون تابع کمکی $F(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a) \qquad (1)$$

این تابع در حقیقت فاصلهٔ عمودی بین نقطهٔ $(x, f(x))$ روی نمودار تابع f و نقطهٔ متناظر با آن روی وتر $\overline{AB}$ را اندازه می‌گیرد. اکنون نشان دهیم که تابع F در هر سه شرط قضیهٔ رول صدق می‌کند.
تابع F بر بازه بستهٔ $[a,b]$ پیوسته است به دلیل آن که حاصلجمع f و یک چند جمله‌ای درجه اول است که هر دو بر این بازهٔ بسته پیوسته می‌باشند. بنابراین شرط (i) در مورد F برقرار است. شرط (ii) نیز برای F برقرار است زیرا f بر (a,b) مشتق‌پذیر است. از معادلهٔ (1) مشاهده می‌کنیم که $F(a)=0$ و $F(b)=0$. لذا شرط (iii) از قضیهٔ رول در مورد F برقرار است.
حکم قضیهٔ رول بیان می‌کند که نقطه‌ای مانند c در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد به طوری‌که $F'(c)=0$.

امّا

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

بنابراین

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

لذا، نقطه‌ای مانند c در (a, b) وجود دارد به طوری‌که

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

یا $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. بدین ترتیب قضیهٔ ثابت شده است.

تبصره : در حالت خاصی که وتر $\overline{AB}$ منطبق بر محور X ها یا موازی با آن باشد قضیهٔ مقدار میانگین به قضیهٔ رول تقلیل می یابد.

مثال ۱۱ : برای توابع زیر شرایط قضیهٔ میانگین را در بازه‌های داده شده بررسی کرده و، در صورت برقراری شرایط، نقطه (یا نقاط) c ذکر شده در قضیه را مشخص نمایید:

(i) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ بر $[1,3]$.

(ii) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ بر $[-2,2]$.

(iii) $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x - 7}$ بر $[2,6]$.

(iv) $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$ بر $[1,4]$.

(v) $f(x) = 2\sqrt[5]{(x-5)^2}$ بر $[-1,6]$.

حل. (i) چون f یک چند جمله‌ای است به ازای هر $x \in R$ پیوسته است. بنابراین شرایط قضیهٔ مقدار میانگین در هر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ برقرار است. داریم

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3 \quad \text{و} \quad f(1) = -7 \,,\; f(3) = -27 \,.$$

همچنین $-10 = \frac{-27 - (-7)}{2} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$. با قرار دادن $f'(c) = -10$ بدست می‌آوریم

$$3c^2 - 10c - 3 = -10 \Leftrightarrow 3c^2 - 10c + 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3c-7)(c-1)=0 \Leftrightarrow c=\frac{7}{3} \text{ یا } c=1 .$$

چون عدد 1 به بازه باز $(1,3)$ تعلق ندارد تنها مقدار ممکن برای c عدد $\frac{7}{3}$ است.

(ii) تابع f در $[-2,2]$ پیوسته است. داریم $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ و بنابراین $f'(c)=\frac{2}{3c^{\frac{1}{3}}}$.

امّا $0=\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{4^{\frac{1}{3}}-4^{\frac{1}{3}}}{4}=0$ و دیده می‌شود که هیچ مقداری برای c وجود ندارد به طوری‌که $\frac{2}{3}c^{\frac{1}{3}}=0$.

علت این‌که نمی‌توانیم از حکم قضیهٔ مقدار میانگین استفاده کنیم این است که تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست و لذا شرط مشتق‌پذیر بودن تابع f بر بازهٔ $(-2,2)$ برقرار نمی‌باشد.

شکل ۴ . ۱۹

(iii) حوزهٔ تعریف تابع $Df=R-\{7\}$ است و بنابراین بدیهی است که تابع f در $[2,6]$ پیوسته است. مشتق تابع f عبارت است از $f'(x)=\frac{x^2-14x-28}{(x-7)^2}$ و تنها به ازای $x=7$ تابع f' وجود

ندارد. پس تابع f در $(2,6)$ مشتق‌پذیر است. بنابراین شرایط قضیهٔ میانگین برقرار است. داریم
$f(2)=-\frac{12}{5}$ ، $f(6)=-60$ و

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Leftrightarrow\frac{c^2-14c-28}{(c-7)^2}=\frac{-60-(-\frac{12}{5})}{6-2}\Leftrightarrow$$
$$\frac{c^2-14c-28}{(c-7)^2}=-\frac{72}{5}\Leftrightarrow c^2-14c+44=0.$$

از حل این معادله دو جواب $c_1=7-\sqrt{5}$ و $c_2=7+\sqrt{5}$ بدست می‌آید و چون $c_2\notin[2,6]$ پس تنها جواب قابل قبول $c_1=7-\sqrt{5}$ است.

(iv) بدیهی است که تابع f بر بازهٔ $[1,4]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند. داریم

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{4-1}{4-1}=1 \quad \text{و} \quad f'(x)=\frac{4}{x^2}.$$

قرار می‌دهیم

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{4}{c^2}\Leftrightarrow 1=\frac{4}{c_2}\Leftrightarrow c^2=4 \quad \Leftrightarrow c=\pm 2.$$

تنها جواب $c=2$ در بازهٔ $(1,4)$ قرار دارد و قابل قبول است.

(v) چون فرجه رادیکال فرد است پس تابع به ازای هر $x\in R$ پیوسته است. داریم

$$f(x)=2(x-5)^{\frac{2}{5}}\Rightarrow f'(x)=2\times\frac{2}{5}\times 1\times(x-5)^{\frac{-3}{5}}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{\sqrt[5]{(x-5)^3}}.$$

در نقطهٔ $x=5$ تابع f' تعریف نشده است پس تابع f نمی‌تواند بر بازهٔ باز $(-1,6)$ مشتق‌پذیر باشد. این نشان می‌دهد که شرط دوم قضیهٔ مقدار میانگین برقرار نیست.

مثال ۱۲ : (i)در کدام نقطهٔ P از منحنی $y=x^2$ خط مماس بر منحنی موازی قطعه خطی است که از نقاط $A(-1,1)$ و $B(3,9)$ می‌گذرد ؟

(ii) فرض کنیم تابع f با ضابطهٔ زیر تعریف شده باشد :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & , \ 0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & , \quad x>0.\end{cases}$$

در فاصلهٔ $[a,b]=[0,2]$ قضیهٔ مقدار میانگین را بکار برده و نقطهٔ c را که در شرط $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ صدق می‌کند پیدا کنید.

(iii) فرض کنیم توابع f و g در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین بر $[a,b]$ صدق کنند. به علاوه فرض کنیم که به ازای هر x در بازهٔ باز (a,b)، $f'(x)=g'(x)$. ثابت کنید که به ازای هر x در $[a,b]$،

$$f(x)-g(x)=f(a)-g(a).$$

حل. (i) تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ را در نظر می‌گیریم. این تابع بر بازهٔ $[-1,3]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند، پس نقطه‌ای مانند $c\in(-1,3)$ وجود دارد به طوری‌که

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(c).$$

امّا $f'(x)=2x$ پس $\dfrac{9-1}{4}=2c$ و لذا $c=1$. در نتیجه در نقطهٔ $P(1,1)$ با توجه به تعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین خط مماس بر منحنی $y=x^2$ موازی با قطعه خط AB است.

شکل ۴ . ۲۰

(ii) چون $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 = f(1)$ و $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1$، پس تـابع f در $x=1$ پیوسته بوده و بنابراین بر بازهٔ بستهٔ $[0,2]$ پیوسته می‌باشد.

حال مشتق‌پذیری تابع بر $(0,2)$ را بررسی می‌نماییم. به ازای $0<x<1$، $f(x)=\frac{3-x^2}{2}$ و لذا $f'(x)=-x$. به ازای $x>0$ ، $f(x)=\frac{1}{x}$ و لذا $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$. همچنین داریم

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{1-1-\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{-1}{1+\Delta x} = -1$$

و

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\frac{3-(1+\Delta x)^2}{2}-1}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{3-(1+\Delta x^2)-2}{2\Delta x} = \lim_{x\to 0^-}(\frac{-\Delta x}{2}-1) = -1.$$

پس $f'_-(1) = f'_+(1)$ و بنابراین تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است. از آنچه گفته شد نتیجه مـی‌گیـریم کـه تابع f بر $(2,0)$ مشتق‌پذیر است. اکنون تابع f بر $[0,2]$ در هر دو شرط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند و لذا نقطه‌ای مانند $c\in(0,2)$ وجود دارد به طوری‌که

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(c).$$

اما $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$ ولذا $f'(c) = -\frac{1}{2}$.

دو حالت در نظر می‌گیـریم، اولاً $f(x)=\frac{3-x^2}{2}$ ، پس $f'(x)=-x$ و در نتیجـه $-c=-\frac{1}{2}$، یعنـی، $c=\frac{1}{2}$. ثانیاً $f(x)=\frac{1}{x}$ ، پس $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ و در نتیجه $\frac{-1}{c^2}=\frac{-1}{2}$، یعنی، $c^2=2$ که نتیجه می‌دهـد (با توجه به این که بایستی $c\in(0,2)$) $c=\sqrt{2}$.

بنابراین دو جواب $\sqrt{2},\frac{1}{2}$ برای c بدست می‌آید.

(iii) فرض کنیم $a < x \leq b$ و تابع h را به صورت $h(x) = f(x) - g(x)$ تعریف می‌کنیم.
بدیهی است که تابع h بر بازهٔ بستهٔ $[a,x]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند. بنابراین نقطه‌ای مانند $c \in (a,x)$ وجود دارد به طوری‌که $\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(c)$. امّا به ازای هر $x \in (a,b)$، $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$، پس $h'(c) = 0$ و داریم $h(x) - h(a) = 0$، یعنی، $h(x) = h(a)$. اگر بجای $h(x)$ مقدار آن را قرار دهیم بدست می‌آوریم

$$f(x) - g(x) = f(a) - g(a).$$

توجه کنید که تساوی مورد نظر ما به طور بدیهی به ازاء $x = a$ برقرار است، یعنی داریم

$$f(a) - g(a) = f(a) - g(a).$$

با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین می توان درستی بعضی از نامساوی‌ها را ثابت نمود. به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۱۳ : اگر $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$، با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین ثابت کنید که

$$(a-b)tg\, b < \ln(\frac{\cos b}{\cos a}) < (a-b)tg\, a\,.$$

حل. تابع $f(x) = \ln(\cos x)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به شرایط مساله این تابع در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، یعنی، در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند.
بنابراین نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری‌که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

امّا $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tg\, x$ و لذا $f'(c) = -tg\, c$. داریم

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\ln(\cos b) - \ln(\cos a)}{b-a} = \frac{\ln(\frac{\cos b}{\cos a})}{b-a}.$$

پس $\frac{\ln(\frac{\cos b}{\cos a})}{b-a} = -tgc$ و از آنجا $\ln(\frac{\cos b}{\cos a}) = (a-b)tg\, c$.

اما تابع $tg\, x$ در $[a,b]$ صعودی است، پس از $0 < a < c < b < \frac{\pi}{2}$ نتیجه می‌شود که $tg\, a < tg\, c < tg\, b$. از ضرب طرفین این نامساوی در عدد منفی $a-b$ داریم

$$(a-b)\,tg\,b<(a-b)\,tg\,c<(a-b)\,tg\,a$$

و با توجه به تساوی $\ln(\frac{\cos b}{\cos a})=(a-b)\,tg\,c$ بدست می‌آوریم

$$(a-b)\,tg\,b<\ln(\frac{\cos b}{\cos a})<(a-b)\,tg\,a$$

و بنابراین آنچه را که می‌خواهیم ثابت شده است.

مثال ۱۴ : با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین درستی نامساوی‌های زیر را ثابت کنید:

(i) $\quad (x>0)\quad \frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ ؛

(ii) $\quad |\sin x_1-\sin x_2|\le|x_1-x_2|$ ؛

(iii) $\quad |arc\,tg\,x_1-arc\,tg\,x_2|\le|x_1-x_2|$ ؛

(iv) $\quad (0<a<b)\quad \frac{b-a}{b}<\ln(\frac{b}{a})<\frac{b-a}{a}$ ؛

(v) $\quad py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$ که در آن $0<y<x\ ,\ p>1$.

حل. (i) بر بازهٔ بستهٔ $[0,x]$ تابع $f(x)=\ln(1+x)$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند و لذا نقطه ای مانند $c\in(0,x)$ وجود دارد به طوری‌که

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)\,.$$

امّا $f'(x)=\frac{1}{1+x}$ و $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}=\frac{\ln(1+x)}{x}$،
بنابراین $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)}{x}$. حال به دلیل آن که $0<c<x$، می‌توانیم بنویسیم $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)}{x}$ و لذا $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$. همچنین $1>\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)}{x}$ و بنابراین $\ln(1+x)<x$. از این نامساوی‌ها نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\,.$$

(ii) تابع $f(x)=\sin x$ بر اعداد حقیقی R پیوسته و مشتق‌پذیر است و لذا بر بازهٔ بستهٔ $[x_2 , x_1]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند. پس نقطه‌ای مانند $c\in(x_2 , x_1)$ وجود دارد به طوری‌که

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\cos c \qquad \text{(توجه کنید که } f'(x)=\cos x\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x_1-\sin x_2}{x_1-x_2}=\cos c \Leftrightarrow \frac{|\sin x_1-\sin x_2|}{|x_1-x_2|}=|\cos c|.$$

امّا می‌دانیم که $|\cos c|\le 1$ و بنابراین $\frac{|\sin x_1-\sin x_2|}{|x_1-x_2|}\le 1$. از این نامساوی نتیجه می‌گیریم که $|\sin x_1-\sin x_2|\le|x_1-x_2|$.

(iii) تابع $f(x)=arctg\, x$ بر R پیوسته و مشتق‌پذیر است و لذا بر بازهٔ بستهٔ $[x_1 , x_2]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند. پس نقطه‌ای مانند $x\in(x_2 , x_1)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(c).$$

امّا $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ و $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{arctg\, x_1-arctg x_2}{x_1-x_2}$. پس

$$\frac{arctg\, x_1-arctg\, x_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{1+c^2}\le 1 \Rightarrow \frac{|arctg x_1-arctg x_2|}{|x_1-x_2|}\le 1$$
$$\Rightarrow |arctg\, x_1-arctg x_2|\le|x_1-x_2|$$

و این همان نامساوی خواسته شده است.

(iv) تابع $f(x)=\ln x$ را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که f بر $[a , b]$ پیوسته وبر (a,b) مشتق‌پذیر است و لذا در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند. پس نقطه‌ای مانند $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\Leftrightarrow \frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{c}.$$

$$\frac{\ln(\frac{b}{a})}{b-a}=\frac{1}{c}\Leftrightarrow \ln(\frac{b}{a})=\frac{b-a}{c}. \qquad \text{(توجه کنید که، } f'(x)=\frac{1}{x}\text{)}$$

امّا از $a<c<b$ نتیجه می‌شود که $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$ و چون $b-a>0$ پس

$$\frac{b-a}{b}<\frac{b-a}{c}<\frac{b-a}{a}.$$

امّا $\frac{b-a}{c}=\ln(\frac{b}{a})$ و لذا $\frac{b-a}{b}<\ln(\frac{b}{a})<\frac{b-a}{a}$.

(v) تابع $f(t)=t^p$ را در نظر می‌گیریم. این تابع بر R پیوسته و مشتق‌پذیر است و لذا بر بازهٔ بستهٔ $[y,x]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند. پس نقطه‌ای مانند $c\in(y,x)$ وجود دارد به طوری‌که $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$. امّا $f'(t)=pt^{p-1}$ و بنابراین

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)\Leftrightarrow\frac{x^p-y^p}{x-y}=pc^{p-1}$$

$$\Leftrightarrow x^p-y^p=pc^{p-1}(x-y).$$

امّا از $y<c<x$ نتیجه می‌شود که $y^{p-1}<c^{p-1}<x^{p-1}$ و اگر این نامساوی‌ها را در عدد مثبت $p(x-y)$ ضرب کنیم خواهیم داشت

$$py^{p-1}(x-y)<pc^{p-1}(x-y)<px^{p-1}(x-y)$$

و چون $pc^{p-1}(x-y)=x^p-y^p$ ، پس $py^{p-1}(x-y)<x^p-y^p<px^{p-1}(x-y)$.

در ادامهٔ بیان و اثبات قضیه‌های رول و مقدار میانگین به بررسی قضیهٔ کوشی می‌پردازیم که تعمیم مهّمی از قضیهٔ مقدار میانگین است. این قضیه در قسمت‌های بعدی و در اثبات دستور هوپیتال مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

قضیهٔ ۱۱ (قضیهٔ کوشی) : فرض کنیم توابع f و g در شرایط زیر صدق کنند :

(i) f و g بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته هستند ؛

(ii) f و g بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر هستند ؛

(iii)به ازای هر x در بازهٔ باز (a,b)، $g'(x)\neq 0$.

در این صورت نقطه‌ای مانند c در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد به طوری‌که

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم که $g(b) \neq g(a)$. فرض کنیم $g(b) = g(a)$. به دلیل آن که تابع g در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند نقطه‌ای مانند x_0 در (a,b) وجود دارد به طوری‌که $g'(x_0) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$. چون $g(b) = g(a)$ فرض شده است، نتیجه می‌گیریم که $g'(x_0) = 0$ و این با فرض (iii) در قضیه که به ازای هر $x \in (a,b)$، $g'(x) \neq 0$ در تناقض است. لذا فرض $g(b) = g(a)$ غلط است و بنابراین بایستی $g(b) \neq g(a)$.

اکنون تابعی کمکی h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$h(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)(g(x) - g(a)).$$

در این صورت

$$h'(x) = f'(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)g'(x) \qquad (1)$$

به دلیل آن که f و g بر $[a,b]$ پیوسته هستند تابع h نیز بر $[a,b]$ پیوسته است و چون f و g بر (a,b) مشتق‌پذیر هستند، h نیز بر (a,b) مشتق پذیر است.به علاوه

$$h(a) = f(a) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)(g(a) - g(a)) = 0$$

و

$$h(b) = f(b) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)(g(b) - g(a)) = 0.$$

بنابراین هر سه شرط قضیهٔ رول برای تابع h برقرار است. پس نقطه‌ای مانند c در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد به طوری‌که $h'(c) = 0$. بنابراین از (1) داریم

$$f'(c) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)g'(c) = 0. \qquad (2)$$

چون بر (a,b)، $g'(c) \neq 0$ از (2) داریم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

که در آن c نقطه‌ای در (a,b) است. بدین ترتیب قضیه ثابت شده است.

تبصره : (1) اگر در قضیهٔ کوشی تابع g با ضابطهٔ $g(x)=x$ اختیار شود، آنگاه حکم قضیهٔ کوشی به حکم قضیهٔ مقدار میانگین تقلیل می‌یابد زیرا در این وضعیت $g'(c)=1$. بنابراین قضیهٔ مقدار میانگین حالت خاصی از قضیهٔ کوشی است.

(2) برای آن که بتوان تعبیری هندسی از قضیهٔ کوشی ارائه داد نیاز به آشنایی با معادلات پارامتری منحنی‌های صفحه داریم که در روند موضوعی کتاب هنوز به آن نپرداخته‌ایم.

(3) ممکن است تصور شود که برای اثبات قضیهٔ کوشی می‌توان قضیه مقدار میانگین را برای صورت و مخرج کسر

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

بکار برد، امّا این تصوری نادرست است. زیرا با انجام چنین کاری (و پس از حذف $b-a$) فرمول زیر را بدست می‌آوریم :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$$

که در آن $a<c_1<b$ و $a<c_2<b$. اکنون به دلیل آن که در حالت کلی $c_1 \neq c_2$، دیده می‌شود که نتیجهٔ بدست آمده با حکم قضیهٔ کوشی تفاوت دارد.

مثال ۱۵ : برقراری قضیه کوشی را برای توابع زیر در بازه‌های داده شده بررسی کنید :

(i) توابع $g(x)=x^3-4x+2,\ f(x)=3x^2+3x-1$ بر $[0,1]$ ؛

(ii) توابع $g(x)=\sin x,\ f(x)=\cos x$ بر $[0,\frac{\pi}{2}]$ ؛

(iii) توابع $g(x)=\frac{x^2}{1+x^2},\ f(x)=e^x$ بر $[-3,3]$.

حل. (i) داریم $f'(x)=6x+3$ و $g'(x)=3x^2-4$ و بنابراین f و g همه جا پیوسته و مشتق‌پذیر هستند. بسادگی دیده می‌شود که به ازای هر x در $(0,1)$، $g'(x)\neq 0$. لذا بنابر قضیهٔ کوشی، نقطه‌ای مانند z در $(0,1)$ وجود دارد به طوری‌که

$$\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)}=\frac{6z+3}{3z^2-4}.$$

با قرار دادن $f(1)=5$ ، $g(1)=-1$، $f(0)=-1$، $g(0)=2$ و حل برای z ، بدست می‌آوریم

$$\frac{5-(-1)}{-1-2}=\frac{6z+3}{3z^2-4}\Leftrightarrow 6z^2+6z-5=0$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{-3\pm\sqrt{39}}{6}.$$

تنها یکی از جواب‌ها، یعنی، $z=\frac{-3+\sqrt{39}}{6}$ در $(0,1)$ قرار دارد.

(ii) داریم $f'(x)=-\sin x$ و $g'(x)=\cos x$ ، بنابراین توابع f و g بر R پیوسته و مشتق‌پذیر بوده و به ازای هر x در $(0,\frac{\pi}{2})$، $g'(x)\neq 0$. در نتیجه می‌توان از قضیهٔ کوشی استفاده نمود. داریم

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{g(\frac{\pi}{2})-g(0)}=\frac{\cos(\frac{\pi}{2})-\cos 0}{\sin(\frac{\pi}{2})-\sin 0}=\frac{0-1}{1-0}=-1$$

و

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{-\sin c}{\cos c}=-tg\,c.$$

بنابراین

$$\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{g(\frac{\pi}{2})-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\Leftrightarrow -1=-tg\,c\Leftrightarrow tg\,c=1.$$

از حل این معادله برای c و توجه به شرط $0<c<\frac{\pi}{2}$، بدست می‌آوریم $c=\frac{\pi}{4}$.

(iii) بسادگی دیده می‌شود که توابع f و g به ازای هر $x\in R$ پیوسته و مشتق‌پذیر هستند. امّا چون $g(3)=g(-3)$ ، نمی‌توان فرمول $\frac{f(3)-f(-3)}{g(3)-g(-3)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ را برای این دو تابع بکار برد. دقت کنید که می‌توان نشان داد نقطه‌ای مانند $c\in(-3,3)$ وجود دارد به طوری‌که $g'(c)=0$ و بنابراین شرط (iii)از قضیهٔ کوشی برقرار نیست.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ مقدار میانگین اکنون قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که در محاسبهٔ مشتق توابع چند ضابطه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیهٔ ۱۲ : فرض کنیم تابع f در نقطهٔ c پیوسته بوده و در یک همسایگی محذوف c مانند (a,b) مشتق‌پذیر باشد. به علاوه فرض کنیم $\lim\limits_{x\to c} f'(x)=l$.
در این صورت $f'(c)$ وجود داشته و برابر با l است، یعنی، تابع f در c مشتق‌پذیر است.

اثبات. فرض کنیم $x\in(a,b)$ و $x>c$. تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[c,x]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند، زیرا در (c,x) مشتق‌پذیر بوده و در $[c,x]$ پیوسته است. بنابراین نقطه‌ای مانند $z\in(c,x)$ وجود دارد به طوری‌که $f'(z)=\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$. حال از طرفین این تساوی حد می‌گیریم وقتی $x\to c^+$ ؛

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^+} f'(z).$$

ملاحظه می‌کنیم که $c<z<x$ و اگر $x\to c^+$، آنگاه $z\to c^+$ امّا با توجه به مفروضات قضیه، $\lim\limits_{z\to c^+} f'(z)=l$ و بنابراین

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{z\to c^+} f'(z)=l$$

یعنی، $f'_+(c)=l$. به طریق مشابه، اگر $x\in(a,b)$ و $x<c$، آنگاه تابع f بر $[x,c]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق کرده و می‌توان ثابت نمود که $f'_-(c)=l$.
از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که $f'(c)=l$ ، یعنی، f در c مشتق‌پذیر است.

مثال ۱۶ : (i)به ازای چه مقادیری از b,m تابع

$$f(x)=\begin{cases} mx+b\ , & x<a\\ x^2\ , & x\ge a\end{cases}$$

در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است؟
(ii)در تابع f با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1\ , & x\ge 0\\ 1-x^2\ , & x<0\end{cases}$$

$f'(0)$ را محاسبه نمایید.

حل. (i) می‌دانیم که اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد پیوسته هم هست. حال شرطی را می‌نویسیم که تابع f در a پیوسته باشد. برای این منظور بایستی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$. امّا، $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-}(mx+b) = ma+b$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} x^2 = a^2 = f(a)$. پس $a^2 = ma+b \quad (1)$. همچنین داریم

$$f'(x) = \begin{cases} m & , \ x < a \\ 2x & , \ x > a \end{cases}$$

و

$\lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to a^-} m = m$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to a^+} 2x = 2a$. اگر قرار دهیم

$$m = 2a \qquad (2)$$

آنگاه می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ ۱۲ نتیجه بگیریم که تابع f در a مشتق‌پذیر است. امّا از معادلات (1) و (2) بدست می‌آوریم که $m = 2a$, $b = -a^2$.

(ii) داریم

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \ x > 0 \\ -2x & , \ x < 0 \end{cases}$$

و نیز $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(-2x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$، یعنی، $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. اکنون به کمک قضیهٔ ۱۲ بدست می‌آوریم که $f'(0) = 0$.

در فصل سوم و بحث از مشتق توابع ثابت کردیم که اگر f تابعی ثابت باشد، آنگاه مشتق f همواره برابر صفر است. اکنون این پرسش را مطرح می‌کنیم که اگر تابعی دارای مشتق صفر باشد آیا می‌توان ادعا نمود که خودِ تابع ثابت است ؟ جواب در حقیقت مثبت است.

قضیهٔ ۱۳ : فرض کنیم تابع f روی بازهٔ دلخواه I مشتق‌پذیر بوده و به ازای هر $x \in I$ داشته باشیم $f'(x) = 0$. در این صورت f بر I مقدار ثابتی است، یعنی، در تمامی نقاط I مقدار یکسانی را اختیار می‌کند.

اثبات. فرض کنیم a نقطهٔ ثابتی از I و x نقطهٔ دلخواهی از آن باشد. اگر $a < x$ آنگاه بر بازهٔ بستهٔ $[a, x]$ شرایط قضیهٔ مقدار میانگین برای تابع f برقرار است. زیرا فرض صفر بودن مشتق f بر

I دلیل بر وجود آن است و هر تابع مشتق‌پذیر پیوسته هم هست. بنابراین نقطه‌ای مانند $c\in(a,x)$ وجود دارد به طوری‌که $f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. امّا بنا بر فرض $f'(c)=0$ و لذا $f(x)-f(a)=0$، یعنی، $f(x)=f(a)$. اگر $x<a$ آنگاه می‌توان استدلال بالا را بر بازهٔ $[x,a]$ بکار برد و مجدداً به تساوی $f(x)=f(a)$ رسید. بدین ترتیب به ازای هر $x\in I$، $f(x)=f(a)$، یعنی، f بر I تابعی ثابت است.

مثال ۱۷ : (i) فرض کنیم تابع f بر اعداد حقیقی R تعریف شده باشد و فرض کنیم که به ازای هر $x,y\in R$،

$$|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2.$$

نشان دهید که f بر R تابعی است ثابت.

(ii) فرض کنیم f تابعی باشد که به ازای هر $x\in R$ دارای مشتق ثابت $f'(x)=a$ است. نشان دهید که تابع f خطی است، یعنی، $f(x)=ax+b$ که در آن b عددی ثابت است.

حل. (i) کافی است نشان دهیم که به ازای هر $x\in R$، $f'(x)=0$ و سپس از قضیهٔ ۱۳ استفاده کنیم. اگر x عدد حقیقی دلخواه و $\Delta x\neq 0$ نمّوی دلخواه برای متغیر x باشد، آنگاه بنا بر فرض

$$|f(x+\Delta x)-f(x)|\le(x+\Delta x-x)^2$$

یعنی

$$|f(x+\Delta x)-f(x)|\le|\Delta x|^2.$$

حال طرفین نامساوی اخیر را بر $|\Delta x|>0$ تقسیم می‌کنیم ؛

$$0\le\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\le|\Delta x|.$$

سپس از نامساوی‌های بالا حد می‌گیریم وقتی $\Delta x\to 0$،

$$0\le\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|\le\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|.$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ فشردگی دیده می‌شود که

$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right|=0$ و بنابراین $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$. در نتیجه داریم $f'(x)=0$.

(ii) فرض کنیم $x > a$. تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a, x]$ در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند. پس نقطه‌ای مانند $c \in (a, x)$ وجود دارد به طوری‌که $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c)$. امّا $f'(c) = a$ و لذا

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = a \Leftrightarrow f(x) - f(a) = a(x-a)$$
$$\Leftrightarrow f(x) = ax + (f(a) - a^2).$$

اگر مقدار ثابت $f(a) - a^2$ را b بنامیم بدست می‌آوریم ؛ $f(x) = ax + b$.
اگر $x < a$ با استدلال مشابهی بدست می‌آوریم $f(x) = ax + b$.

نتیجه : فرض کنیم تابع f روی بازهٔ I مشتق‌پذیر باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای آن که مشتق f روی I برابر با صفر باشد آن است که f بر I تابعی ثابت باشد.

مثال ۱۸ : (i) با استفاده از قضیهٔ ۱۳ درستی اتحادهای زیررا ثابت کنید :

(a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ؛

(b) $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ؛

(c) $2 \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ برای $0 < x < \infty$.

(ii) می‌دانیم که اگر $f(x) = e^x$ ، آنگاه $f'(x) = e^x$. کلیه توابعی مانند $g(x)$ را پیدا کنید که در شرط $g'(x) = f'(x)$ صدق می‌کنند.

حل. (i) (a) تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ را، که در بازهٔ بستهٔ $[-1,1]$ تعریف شده است، در نظر می‌گیریم. مشتق تابع f در بازهٔ باز $(-1,1)$ برابر است با

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \equiv 0 \quad (-1 < x < 1)$$

لذا بنابر قضیهٔ ۱۳، f تابعی ثابت است، یعنی

$$\arcsin x + \arccos x = c \quad (-1 < x < 1)$$

که در آن مقدار c مقدار ثابتی است. برای بدست آوردن مقدار ثابت c ، به عنوان مثال، $x = 0$ قرار داده ؛ و می‌بینیم که $c = \frac{\pi}{2}$، و از آنجا

$$arc\sin x + arc\cos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 < x < 1).$$

برقراری این تساوی در نقاط $x = \pm 1$ مستقیماً ثابت می‌شود، یعنی، بدیهی است که

$$arc\sin(+1) + arc\cos(+1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

و

$$arc\sin(-1) + arc\cos(-1) = \frac{-\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

(b) تابع $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x$ را در نظر می‌گیریم. این تابع بر R تعریف شده است. مشتق f را محاسبه می‌کنیم :

$$f'(x) = 2\sin x\cos x + \frac{1}{2}\times(-2\sin 2x) = \sin 2x - \sin 2x \equiv 0$$

یعنی همواره مشتق برابر با صفر است. لذا بنابر قضیهٔ ۱۳، f تابعی ثابت است، یعنی،

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = c.$$

برای تعیین مقدار ثابت c، به عنوان مثال، $x = 0$ قرار داده و بدست می‌آوریم $c = \frac{1}{2}$.

بنابراین داریم $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

(c) تابع f با ضابطهٔ

$$f(x) = arc\cos\frac{1-x^2}{1+x^2} - 2arc\,tg\,x$$

را در نظر می‌گیریم. این تابع بر سرتاسر R تعریف شده است. مشتق تابع f به ازای هر $x > 0$ مساوی با صفر است:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}}\times\frac{-4x}{(1+x^2)^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{4x}{2x(1+x^2)} - \frac{2}{1+x^2} \equiv 0.$$

لذا بنابر قضیهٔ ۱۳، f تابعی ثابت است، یعنی،

$$arc\cos\frac{1-x^2}{1+x^2} - 2arc\,tg\,x = c \quad (x > 0)$$

برای تعیین c، به عنوان مثال، $x = 1$ قرار داده و بدست می‌آوریم $c = arc\cos 0 - 2arc\,tg 1 = 0$.
بنابراین

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\,arctg\,x=0 \Leftrightarrow \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=2\,arctgx.$$

(ii) تابع $g(x)$ را با شرط $g'(x)=g(x), \forall x\in R$ در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$\varphi(x)=\frac{g(x)}{e^x}=g(x)e^{-x}.$$

مشتق این تابع همه جا مساوی با صفر است :

$$\varphi'(x)=g'(x)\,e^{-x}-e^{-x}g(x)\equiv 0$$

لذا بنابر قضیهٔ ۱۳، $\varphi(x)=\frac{g(x)}{e^x}=c$، که از آنجا $g(x)=ce^x$.

لذا کلیهٔ توابعی که برای آن‌ها $f'(x)=f(x)$ با فرمول $f(x)=ce^x$ داده شده اند، که در آن c مقدار ثابت دلخواهی است.

تعریف : تابع F را یک **تابع اوّلیه (ضد مشتق)** تابع f بر بازهٔ I می‌نامند در صورتی که به ازای هر $x\in I$، $F'(x)=f(x)$.

به عنوان مثال، $F(x)=\frac{x^3}{3}$ یک تابع اولیّه $f(x)=x^2$ است زیرا $F'(x)=(\frac{x^3}{3})'=x^2$. بسادگی دیده می‌شود که اگر تابع مفروض f دارای تابع اولیه باشد، آنگاه این تابع اولیه منحصر به فرد نیست. در بالا $F(x)=\frac{x^3}{3}$ و $G(x)=\frac{x^3}{3}+4$، یا به طور کلّی $H(x)=\frac{x^3}{3}+c$ (که در آن c مقدار ثابتی است) همگی توابع اولیّه $f(x)$ می‌باشند، زیرا $H'(x)=G'(x)=F'(x)=x^2$.

قضیهٔ زیر بستگی هر دو تابع اولیّه یک تابع بیکدیگر را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۴ : اگر F_1, F_2 دو تابع اولیّهٔ تابع مفروض f بر بازهٔ I باشند، آنگاه اختلاف آن دو در یک عدد ثابت است.

اثبات. بنابر تعریف تابع اولیّه، به ازای هر $x\in I$ ،

$$\begin{cases} F_1'(x)=f(x) \\ F_2'(x)=f(x). \end{cases} \qquad (1)$$

قرار می‌دهیم $F_1(x)-F_2(x)=\varphi(x)$. در این صورت با استفاده از (۱) داریم

$$F_1'(x)-F_2'(x)= f(x)- f(x)=0$$

یا

$$\varphi'(x)=(F_1(x)-F_2(x))'=0 \qquad (\forall x\in I).$$

پس بنابر قضیهٔ ۱۳ عدد ثابتی مانند c وجود دارد به طوری‌که $\varphi(x)=c$، یعنی،

$$F_1(x)-F_2(x)=c$$

و قضیه ثابت شده است.